Lógica Proposicional – Parte II

Raquel de Souza Francisco Bravo
e-mail: raquel@ic.uff.br
25 de outubro de 2016

Argumento Válido

Um argumento pode ser ser representado em forma simbólica como:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow Q$$

Onde P_1, P_2, …,P_n são proposições dadas, chamadas de hipóteses (premissas) do argumento, e Q é a conclusão do argumento. Dizemos que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n$ *implica logicamente* Q ou Q pode ser *deduzido logicamente* de $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n$.

Argumento Válido

A fbf proposicional $P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n \rightarrow Q$ é um argumento válido quando for uma tautologia.

Para testar se $P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n \rightarrow Q$ é uma tautologia, podemos:

- tabela-verdade
- regras de dedução
  - Modificam uma fbf de modo a preservar seu valor lógico;
  - Começamos com as hipóteses $P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n$ (supostas verdadeiras) e tenta aplicar as regras de dedução para chegar a conclusão Q.

Sequência de Demonstração

Uma sequência de demonstração é uma sequência de fbf's na qual cada fbf é uma hipótese (premissa) ou o resultado de se aplicar uma das regras de dedução do sistema formal a fbf's anteriores na sequência.

P_1	(hipótese ou premissa)
P_2	(hipótese ou premissa)
⋮	⋮
P_n	(hipótese ou premissa)
fbf_1	(obtida aplicando-se uma regra de dedução a fbf's anteriores)
fbf_2	(obtida aplicando-se uma regra de dedução a fbf's anteriores)
⋮	⋮
Q	(obtida aplicando-se uma regra de dedução a fbf's anteriores)

Regras de Dedução para a Lógica Proposicional

- Equivalências

Permitem que fbf’s individuais sejam reescritas mantendo o mesmo valor lógico.

- Inferência

Permitem a dedução de novas fbf’s a partir de fbf’s anteriores na sequência de demonstração.

Regras de Equivalência

Expressão	Equivalente a	Nome/Abreviação da Regra
$P \wedge Q$ $P \vee Q$	$Q \wedge P$ $Q \vee P$	Comutatividade - com
$(P \vee Q) \vee R$ $(P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R)$ $P \wedge (Q \wedge R)$	Associatividade - ass
$\neg (P \vee Q)$ $\neg (P \wedge Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$ $\neg P \vee \neg Q$	Leis de De Morgan – De Morgan
$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	Condicional - cond
P	$\neg (\neg P)$	Dupla negação - dn
$P \wedge (P \vee Q)$ $P \vee (P \wedge Q)$	P P	Absorção – abs

Regras de Equivalência

Expressão	Equivalente a	Nome/Abreviação da Regra
$P \wedge P$ $P \vee P$	P P	Idempotente - idemp
$P \wedge T$ $P \vee F$	P P	Identidade - id
$P \leftrightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Bicondicional – bicond
$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	Contrapositiva - cpos

Exemplo

Suponha que uma hipótese de um argumento proposicional pode ser simbolizada como:

$$(\neg A \vee \neg B) \vee C$$

Então, uma sequência de demonstração para o argumento poderia começar com os seguintes passos:

1.	$(\neg A \vee \neg B) \vee C$	hip (hipótese)
2.	$\neg (A \wedge B) \vee C$	1, De Morgan
3.	$(A \wedge B) \rightarrow C$	2, cond

Conclusão

Hipótese ou premissa

Regras de Inferência

As regras de inferência são regras lógicas que nos permitem deduzir proposições a partir de outras.

NOTAÇÃO: $\dfrac{A}{B}$

Dizemos que $\dfrac{A}{B}$ é uma regra de inferência quando $A \rightarrow B$ é uma tautologia.

Regras de Inferência

De	Podemos deduzir	Nome/Abreviação da Regra
$P, P \rightarrow Q$	Q	Modus Ponens – MP
$P \rightarrow Q , \neg Q$	$\neg P$	Modus Tollens – MT
P , Q	$P \wedge Q$	Conjunção – conj
$P \wedge Q$ $P \wedge Q$	P Q	Simplificação – simp
P	$P \vee Q$	Adição – ad
$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow (P \wedge Q)$	Absorção – abs
$P \vee Q , \neg P$ $P \vee Q , \neg Q$	Q P	Silogismo disjuntivo – SD

Regras de Inferência

De	Podemos deduzir	Nome/Abreviação da Regra
$P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow R$	$P \rightarrow R$	Silogismo hipotético – SH
$P \rightarrow Q$, $R \rightarrow S$, $P \vee R$	$Q \vee S$	Dilema Construtivo – DC
$P \rightarrow Q$, $R \rightarrow S$, $\neg Q \vee \neg S$	$\neg P \vee \neg R$	Dilema Destrutivo – DD
$P \rightarrow Q$, $R \rightarrow Q$	$P \vee R \rightarrow Q$	Inferência por Casos – IC
$P \rightarrow Q \vee R$, $\neg R$	$P \rightarrow Q$	Inferência por Eliminação – IE

Regras de Equivalência X Regras de Inferência

- A regras de equivalência permitem substituição em qualquer direção;

  Ex: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

- As regras de inferência não funcionam em ambas as direções;

  Ex: $P \rightarrow (P \vee Q)$ **Verdadeiro**

  $(P \vee Q) \rightarrow P$ **Falso**

  $(P \vee Q) \rightarrow Q$ **Falso**

Exemplo 1

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$A \land (B \rightarrow C) \land [(A \land B) \rightarrow (D \lor \neg C)] \land B \rightarrow D$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{A,\ (B \rightarrow C),\ (A \land B) \rightarrow (D \lor \neg C),\ B}{D}$$

Exemplo 1

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$A \wedge (B \rightarrow C) \wedge [(A \wedge B) \rightarrow (D \vee \neg C)] \wedge B \rightarrow D$$

1. A	hip (hipótese)
2. $(B \rightarrow C)$	hip (hipótese)
3. $[(A \wedge B) \rightarrow (D \vee \neg C)]$	hip (hipótese)
4. B	hip (hipótese)
5. C	2,4, MP
6. $A \wedge B$	1,4, conj
7. $(D \vee \neg C)$	3,6, MP
8. $(\neg C \vee D)$	7, com
9. $C \rightarrow D$	8, cond
10. D	5,9, MP

Exemplo 2

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge (S \rightarrow R) \rightarrow P \wedge \neg S$$

$$\frac{P \wedge \neg Q \,,\, Q \vee \neg R \,,\, S \rightarrow R}{P \wedge \neg S}$$

Exemplo 2

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge (S \rightarrow R) \rightarrow P \wedge \neg S$$

1.	$P \wedge \neg Q$	hip (hipótese)
2.	$Q \vee \neg R$	hip (hipótese)
3.	$S \rightarrow R$	hip (hipótese)
4.	$\neg Q$	1, simp
5.	$\neg R \vee Q$	2, com
6.	$R \rightarrow Q$	5, cond
7.	$\neg R$	4,6, MT
8.	$\neg S$	3, 7, MT
9.	P	1, simp
10.	$P \wedge \neg S$	8,9, conj

Exemplo 3

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \lor \neg Q) \land (\neg Q \to R) \land (P \to S) \land \neg R \to S$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P \lor \neg Q\,,\ \neg Q \to R\,,\ P \to S\,,\ \neg R}{S}$$

Exemplo 3

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \lor \neg Q) \land (\neg Q \to R) \land (P \to S) \land \neg R \to S$$

1. $P \lor \neg Q$	hip (hipótese)
2. $\neg Q \to R$	hip (hipótese)
3. $P \to S$	hip (hipótese)
4. $\neg R$	hip (hipótese)
5. $\neg(\neg Q)$	2, 4, MT
6. Q	5, DN
7. P	1,6, SD
8. S	3, 7, MP

Exemplo 4

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge \neg(\neg R) \wedge P \vee (S \wedge T) \rightarrow S$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P \rightarrow Q \,,\, Q \rightarrow \neg R \,,\, \neg(\neg R) \,,\, P \vee (S \wedge T)}{S}$$

Exemplo 4

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge \neg(\neg R) \wedge P \vee (S \wedge T) \rightarrow S$$

1.	$P \rightarrow Q$	hip (hipótese)
2.	$Q \rightarrow \neg R$	hip (hipótese)
3.	$\neg(\neg R)$	hip (hipótese)
4.	$P \vee (S \wedge T)$	hip (hipótese)
5.	R	3, DN
6.	$\neg Q$	2, 5, MT
7.	$\neg P$	1, 6, MT
8.	$(S \wedge T)$	4, 7, SD
9.	S	8, simp

Exemplo 5

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow P) \wedge \neg P \rightarrow (R \wedge (P \vee Q))$$

$$\frac{P \vee Q\, ,\, Q \rightarrow R\, ,\, P \rightarrow P\, ,\, \neg P}{R \wedge (P \vee Q)}$$

Exemplo 5

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \vee Q) \wedge (Q \to R) \wedge (P \to P) \wedge \neg P \to (R \wedge (P \vee Q))$$

1. $P \vee Q$	hip (hipótese)
2. $Q \to R$	hip (hipótese)
3. $P \to P$	hip (hipótese)
4. $\neg P$	hip (hipótese)
5. Q	1, 4, SD
6. R	2, 5, MP
7. $R \wedge (P \vee Q)$	1, 6, conj

Exemplo 5

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(P \vee \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P}) \wedge \neg \mathrm{P} \rightarrow (R \wedge (P \vee \mathrm{Q}))$$

1.	$P \vee \mathrm{Q}$	hip (hipótese)
2.	$\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}$	hip (hipótese)
3.	$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{P}$	hip (hipótese)
4.	$\neg \mathrm{P}$	hip (hipótese)
5.	$\mathrm{P} \vee \mathrm{R}$	1, 2, 3, DC
6.	R	4, 5, SD
7.	$R \wedge (P \vee \mathrm{Q})$	1,6, conj

Demonstração Condicional

Suponha que o argumento que queremos provar tenha a forma:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow (R \rightarrow S)$$

onde a conclusão é uma implicação.

Ao invés de usar $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n$ como premissas e inferir $R \rightarrow S$, o método dedutivo nos permite adicionar R como uma hipótese adicional e depois inferir S.

Em outras palavras, podemos provar:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge R \rightarrow S$$

Vantagem:
- ? Nos dá mais uma premissa, isto é, munição para nossa demonstração;
- Simplifica a conclusão desejada.

Exemplo 6

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{A \rightarrow (A \rightarrow B)\ ,\ A}{B}$$

1. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ — hip (hipótese)
2. A — hip (hipótese)
3. $A \rightarrow B$ — 1, 2, MP
4. B — 2, 3, MP

Exemplo 7

Usando lógica proposicional, prove que o argumento:

$$(\neg A \vee B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$\frac{\neg A \vee B\ ,\ B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

1. $\neg A \vee B$ — hip (hipótese)
2. $B \rightarrow C$ — hip (hipótese)
3. $A \rightarrow B$ — 1, cond
4. $A \rightarrow C$ — 2, 3, SH

Exemplo 7

Usando a nova regra, temos:

1. $\neg A \vee B$	hip (hipótese)
2. $B \rightarrow C$	hip (hipótese)
3. A	hip (hipótese)
4. B	1, 3, SD
5. C	2, 4, MP

Argumentos Verbais

Um argumento em português (Ex: os resumos de um advogado em um tribunal, uma propaganda ou um discurso político), formado por declarações simples, pode ser testado logicamente por um processo em duas etapas.

- Simbolize cada declaração usando fbf's proposicionais;
- Prove a validade do argumento construindo uma sequência de demonstração através das regras de dedução para a lógica proposicional.

Exemplo 8

Considere o argumento: “Se as taxas de juros caírem, o mercado imobiliário vai melhorar. A taxa federal de descontos vai cair, ou o mercado imobiliário não vai melhorar. As taxas de juros vão cair. Portanto, a taxa federal de descontos vai cair”.

Usando a notação:

- J a taxa de juros vai cair
- I o mercado imobiliário vai melhorar
- F a taxa federal de descontos vai cair

Argumento fica:

$$(J \rightarrow I) \wedge (F \vee \neg I) \wedge J \rightarrow F$$

Exemplo 8

1. $J \rightarrow I$	hip (hipótese)
2. $F \vee \neg I$	hip (hipótese)
3. J	hip (hipótese)
4. I	1, 3, MP
5. F	2, 4, SD

1. $J \rightarrow I$	hip (hipótese)
2. $F \vee \neg I$	hip (hipótese)
3. J	hip (hipótese)
4. $\neg I \vee F$	2, Com
5. $I \rightarrow F$	4, cond
6. $J \rightarrow F$	1, 5, SH ou 3,6,MP
7. F	3, 6, MP

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Um literal é uma fórmula atômica ou a negação de uma fórmula atômica.

- Ex: $L_1 = \neg \mathbf{r}$

  $L_2 = \mathrm{q}$

Uma cláusula é uma disjunção de literais $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, onde $n > 0$ é um número natural indicando o tamanho da cláusula (número de literais).

- Ex: $C_1 = \neg \mathbf{p} \vee q \vee \mathrm{r}$

  $C_2 = \mathrm{q} \vee \neg \mathbf{r}$

  $C_3 = \mathrm{q}$

  $C_4 = \neg \mathbf{r}$

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Uma fórmula A está na Forma Normal Conjuntiva (FNC) se ela é uma conjunção de cláusulas

$$A = \bigwedge_{k=1}^{m} (L_{1_k} \lor L_{2_k} \lor \ldots \lor L_{n_k})$$
$$= (L_{1_1} \lor \ldots \lor L_{n_1}) \land (L_{1_2} \lor \ldots \lor L_{n_2}) \land \ldots \land (L_{1_m} \lor \ldots \lor L_{n_m})$$

sendo m > 0 um número natural.

- Ex: $(\neg q \lor p \lor r) \land (\neg p \lor r) \land q \land (p \lor r) \land (\neg p \lor r) \land (p \lor \neg r)$.

  $C_1 = \neg q \lor p \lor r$

  $C_2 = \neg p \lor \mathbf{r}$

  $C_3 = q$

  $C_4 = \neg p \lor \mathbf{r}$

  C

Forma Norma Conjuntiva (FNC)

Algoritmo 1: FNC

Entrada: Fórmula A.

Saída: Fórmula B em FNC tal que $A \equiv B$.

repita
    para *todas as subfórmulas* $X, Y, Z \in A$ **faça**
        se $(X \to Y)$ redefina como $(\neg X \vee Y)$
        se $\neg(X \vee Y)$ redefina como $(\neg X \wedge \neg Y)$
        se $\neg(X \wedge Y)$ redefina como $(\neg X \vee \neg Y)$
        se $\neg\neg X$ redefina como X
        se $X \vee (Y \wedge Z)$ redefina como $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$
    fim
até *não ocorrerem substituições*

Ex: Seja a fórmula $p \rightarrow (q \wedge \neg(r \vee p))$, podemos transformá-la em um fórmula em FNC usando as equivalências descritas no Algoritmo 1. Começamos com a equivalência $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$.

Forma Norma Conjuntiva (FNC)

Ex: Seja a fórmula $p \rightarrow (q \wedge \neg(r \vee p))$, podemos transformá-la em um fórmula em FNC usando as equivalências descritas no Algoritmo 1. Começamos com a equivalência $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$.

$p \rightarrow (q \wedge \neg(r \vee p)) \Leftrightarrow$	Implicação
$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge \neg(r \vee p)) \Leftrightarrow$	Lei de De Morgan
$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge (\neg r \wedge \neg p)) \Leftrightarrow$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (\neg r \wedge \neg p)) \Leftrightarrow$	Distributiva
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg p)) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg p)$	

Forma Norma Conjuntiva (FNC)

Uma fórmula A em FNC

$$A=(L_{11} \vee \ldots \vee L_{n1}) \wedge (L_{12} \vee \ldots \vee L_{n2}) \wedge \ldots \wedge(L_{1m} \vee \ldots \vee L_{nm})$$

pode ser escrita como um conjunto cujos elementos são as cláusulas de A

$$A=\{L_{11} \vee \ldots \vee L_{n1}, L_{12} \vee \ldots \vee L_{n2}, \ldots , L_{1m} \vee \ldots \vee L_{nm}\}.$$

Tal forma será chamada Forma Clausal.

- Ex: A fórmula em FNC

$$A = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg p)$$

pode ser escrita como

$$A = \{\neg p \vee q, \neg p \vee \neg r, \neg p \vee \neg p\}$$

que é a sua forma clausal.

Exercícios

1. Justifique cada passo de demontração de:

$$(\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})) \wedge \neg\, \mathrm{B} \wedge \neg\, \mathrm{C} \to \neg\, \mathrm{A}$$

1. $\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \vee \mathbf{C})$
2. $\neg\, \mathrm{B}$
3. $\neg\, \mathrm{C}$
4. $\neg\, \mathrm{B} \wedge \neg\, \mathrm{C}$
5. $\neg(\mathrm{B} \vee \mathrm{C})$
5. $\neg\, A$

Exercícios

2. Justifique cada passo de demonstração de:

$$\neg A \wedge B \wedge (B \rightarrow (A \vee C)) \rightarrow C$$

1. $\neg A$
2. B
3. $B \rightarrow (A \vee C)$
4. $A \vee C$
5. $\neg(\neg A) \vee C$
6. $\neg A \rightarrow C$
7. C

Exercícios

3. Use a lógica proposicional para provar que o argumento é válido

i. $\neg A \wedge (B \rightarrow A) \rightarrow \neg B$

ii. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

iii. $((C \rightarrow D) \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow D)$

iv. $(P \vee Q) \wedge \neg P \rightarrow Q$

v. $P \wedge \neg P \rightarrow Q$

vi. $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

vii. $\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg C \wedge A) \wedge \neg(C \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$

Exercícios

4. Transforme as seguintes fórmulas proposicionais para FNC e dê a forma clausal de cada uma das fórmulas:

i. $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$

ii. $(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

iii. $(P \rightarrow (Q \wedge (Q \rightarrow R))) \wedge (P \wedge \neg R)$

iv. $\neg(P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow P)$

v. $\neg(((P \vee \neg Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \wedge R))$

vi. $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

vii. $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg (A \rightarrow B)$

viii. $((A \leftrightarrow B) \wedge \neg A) \rightarrow \neg B$